⑩ J, 11/03/2021

Los espacios de Hardy: más propiedades básicas

Teorema. Si $1\le p\le\infty$, el espacio normado H^p es completo (Banach) respecto a la norma habitual:

$$\|f\|_p=\lim_{r\to 1^-} M_p(r,f)=\lim_{r\to 1^-}\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\,dm(t)\right)^{\frac{1}{p}},$$

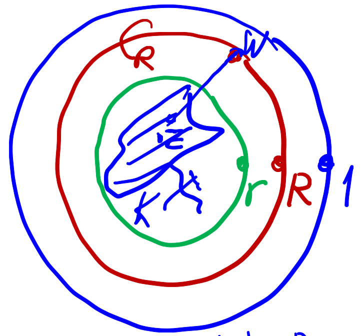
donde $dm(t)=\frac{dt}{2\pi}$, $0\le t\le 2\pi$.

Dem. $\square$ Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en H^p.

Veamos primero que $\exists f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $\forall K\Subset\mathbb{D}$.

Si $K\Subset\mathbb{D}$, $\exists r\in(0,1)$ t.q. $\forall z\in K$, $|z|\le r$. Elijamos R de manera que $r<R<1$. Sea C_R la circunferencia $\{z:|z|=R\}$, con orientación positiva. Según la fórmula integral de Cauchy,

$$f_m(z)-f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f_m(w)-f_n(w)}{w-z}\,dw\,,\quad \forall z\in K$$



$$\Rightarrow |f_m(z)-f_n(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\frac{|f_m(w)-f_n(w)|}{|w-z|}|dw|$$

$|w-z|\ge|w|-|z|\ge R-r$

$$\le\frac{R}{R-r}\int_0^{2\pi}|f_m(Re^{it})-f_n(Re^{it})|\frac{dt}{2\pi}$$

$\boxed{w=Re^{it};\ dw=Rie^{it}dt \quad |dw|=R\,dt}$

$$\le\frac{1}{R-r}M_1(R,f_m-f_n)$$

$$\le\frac{1}{R-r}M_p(R,f_m-f_n)$$

(para R fijo, $M_p(R,f)\nearrow$ cuando $p\nearrow$)

$$\le\frac{1}{R-r}\|f_m-f_n\|_p$$

$\left(M_p(R,f)\nearrow\|f\|_p\,,\ R\to 1^-\right)$.

[aún queda por demostrar esto]

$\boxed{\text{Notación: } u(r)\nearrow M:\ u(r) \text{ es creciente, } \lim u(r)=M}$

De aquí se sigue que $(f_n)_n$ es una sucesión uniforme de Cauchy en compactos y, por tanto, $\exists f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $\forall K \Subset \mathbb{D}$, por el Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Tma. de Weierstrass $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Siendo $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en H^p, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m > n \geq N$, $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$. Manteniendo ε, N y n fijos, vemos que $\forall m > n$, $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$. Por tanto, $\forall r < 1$,

$$M_p(r, f - f_n) = \lim_{m \to \infty} M_p(r, f_m - f_n) \leq \limsup_{m \to \infty} \|f_m - f_n\|_p \leq \varepsilon \quad \circledast$$

Simplemente, $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^{2\pi} |f_m(re^{it}) - f_n(re^{it})|^p \, dm(t)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f_n(re^{it})|^p \, dm(t)\right)^{\frac{1}{p}}$

porque $f_m \rightrightarrows f$ en $\{z : |z| = r\} \Subset \mathbb{D}$.

Dejando que $r \to 1^-$ en $\circledast$, obtenemos

$$\|f - f_n\|_p = \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f - f_n) \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Por tanto, $f \in H^p$ y $f_n \to f$ en H^p. $\boxtimes$

Es importante demostrar el hecho ya citado y usado:

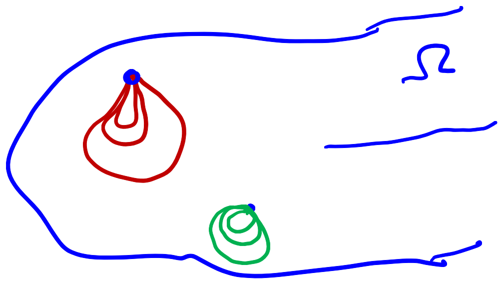
Teorema (Hardy, 1915) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $0 < p < \infty$, entonces $M_p(r, f)$ es una función creciente de $r \in [0, 1)$.

- Para $p = \infty$, como ya hemos comentado, es una consecuencia del Principio de módulo máximo.
- El artículo: G. H. Hardy, The mean value of the modulus of an analytic function, Proc. London Math. Soc. 14 (1915), 269–277, marca el inicio de la teoría de espacios de Hardy, con grandes contribuciones posteriores de F. y M. Riesz, F. y R. Nevanlinna,

Hardy y J.E. Littlewood, A.N. Kolmogórov, I.I. Privalov, A. Beurling, L. Carleson y otros.

• Para poder demostrar el Teorema de Hardy, necesitaremos ciertas propiedades de las funciones subarmónicas. Antes de ello, necesitaremos un repaso de las funciones armónicas, cuyas propiedades también van a ser fundamentales para la teoría de los espacios de Hardy.

RECORDATORIO: Curvas de Jordan y dominios simplemente conexos



• Un dominio Ω se denomina <u>simplemente conexo</u> si cada lazo en Ω es homótopo ("puede deformarse de forma continua") a un punto.

Intuitivamente: Ω "no tiene agujeros".

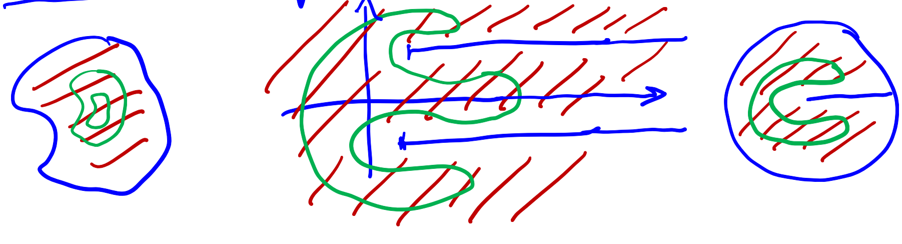
• Una <u>curva de Jordan</u> en el plano es un conjunto homeomorfo a la circunferencia $\mathbb{T}$. (Por tanto, $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, simple y cerrada: $\gamma(0)=\gamma(1)$ y $\forall s,t\in[0,1)$, $s\neq t \Rightarrow \gamma(s)\neq\gamma(t)$.)

• $\{\gamma\}=\gamma([0,1])$: <u>traza</u> de γ.

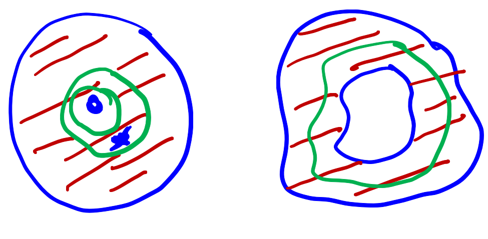
<u>Teorema de Jordan.</u> Si γ es una curva de Jordan en $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$ tiene dos componentes conexas: una acotada y la otra no (dominios <u>interior</u> y <u>exterior</u> a γ, resp.)

• Por tanto, un dominio Ω es simplemente conexo $\Leftrightarrow$ $\forall$ curva de Jordan γ con $\{\gamma\}\subseteq\Omega$, su dominio interior también está contenido en Ω.

<u>Dominios simplemente conexos:</u>

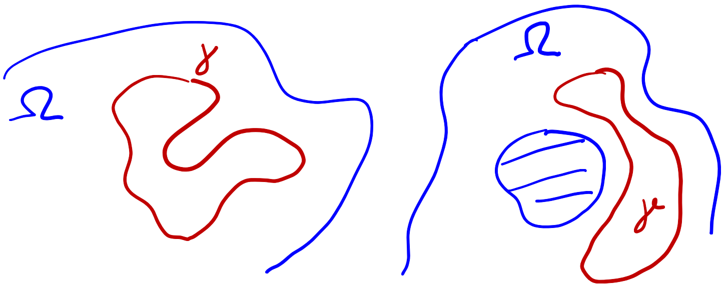


<u>No simplemente conexos:</u>

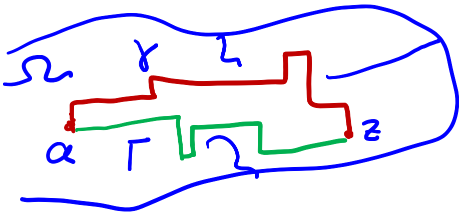


• <u>Teorema integral de Cauchy (–Goursat).</u> Si Ω es un dominio y γ una curva de Jordan con $\{\gamma\} \subseteq \Omega$ (equivalentemente, si Ω es un dominio cualquiera y γ una curva de Jordan cuyo dominio interior está contenido en Ω) y, además, γ es rectificable y $f \in H(\Omega)$, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$



Esto nos permite deducir que, si Ω es simplemente conexo, $f \in H(\Omega)$ y $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$, entonces $\forall$ curva γ desde $a \in \Omega$ hasta $z \in \Omega$ con $\{\gamma\} \subseteq \Omega$,



$$F(z) = \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

no depende de γ. Así es como definimos la función $F(z) = \log f(z)$ en Ω, pues $F'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

Una vez definido el logaritmo, podemos definir, p.ej.,

$$\sqrt{f} = e^{\frac{1}{2}\log f} \quad \text{en } \Omega.$$

Con un trabajo adicional, puede demostrarse el siguiente resultado fundamental (Rudin: "Real and Complex Analysis", Capítulo 13):

<u>Teorema.</u> Si Ω es un dominio en $\mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes (¡pueden añadirse otras!):

(a) Ω es simplemente conexo;

(b) Ω es homeomorfo a $\mathbb{D}$;

(c) $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es conexo; $\quad (\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$

(d) $\forall$ curva de Jordan rectificable γ con $\{\gamma\} \subseteq \Omega$ y $\forall a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0;$$

(e) $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\forall \gamma$ curva de Jordan rectificable en Ω,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0;$$

(f) $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\exists P_n$, polinomios, $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall K \Subset \Omega$, $P_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$;

(g) $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\exists F \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $F' = f$ en Ω;

(h) $\forall f$ t.q. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ ($\Leftrightarrow \forall z \in \Omega, f(z) \neq 0$), $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $f = e^g$ en Ω $\quad (g = \log f)$;

(i) $\forall f$ t.q. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\forall z \in \Omega, f(z) \neq 0$, $\exists h \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $f = h^2$ en Ω $\quad (h = \sqrt{f})$.

REPASO: Funciones armónicas

- Sea $u \in C^2(\Omega)$. El Laplaciano de u es $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
- Diremos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\Delta u \equiv 0$ en Ω. Diremos que f es armónica en Ω si $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$, con $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, si ambos u y v lo son. Notación. $u \in h(\Omega)$.
- $\mathcal{H}(\Omega) \subseteq h(\Omega)$ (es decir: $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow$ (C-R) $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, $f \in C^2$

$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} \equiv 0$ (aquí usamos que v_{xy}, v_{yx} son continuas en Ω) $\Rightarrow u \in h(\Omega)$; $v_{xx} + v_{yy} \equiv 0$: similar.

Esto también prueba que: $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f \in h(\Omega)$.

Tma. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\forall z \in \Omega, f(z) \neq 0 \Rightarrow \log|f| \in h(\Omega)$.

Dem. $\square$ Basta ver que $\forall$ disco $D(a;r) \subseteq \Omega$, $\log|f| \in h(D(a;r))$. $D(a;r)$ es simplemente conexo. Por el Tma. fundamental para los dominios simplemente conexos citado arriba, $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $f = e^g$; si $u = \mathrm{Re}\, g \Rightarrow |f| = e^{\mathrm{Re}\, g} = e^u \Rightarrow u = \log|f|$

y $u \in h(\Omega)$. $\boxtimes$

Tma. (Existencia de la conjugada armónica). Sea Ω un dominio simplemente conexo y $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in h(\Omega)$. Entonces $\exists v: \Omega \to \mathbb{R}$, $v \in h(\Omega)$, t.q. $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(Fácil de demostrar para $\Omega = D(a;r)$.)

v es "casi" única: si v_1 y v_2 son así, $\exists$ constante C t.q. $v_1 - v_2 = C$

v = conjugada armónica de u.

- Es fácil de calcular a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (C-R).

Corolario. Ω simplemente conexo, $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in h(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$.

Dem. $\square$ $u = \operatorname{Re} f$, $\quad f \in \mathcal{H}(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$. $\boxtimes$

- **Núcleo de Poisson.** Es la función

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n} e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int},$$

$0 \leq r < 1$, $t \in [0, 2\pi]$ (o $t \in [-\pi, \pi]$).

Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$\boxed{P_r(\theta - t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} = \operatorname{Re}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (ze^{-it})^n\right\}$$

(serie geométrica) $$= \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{2ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right\}$$

$$= \operatorname{Re} \frac{(e^{it} + z)(e^{-it} - \bar{z})}{|e^{it} - z|^2} = \boxed{\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}}.$$

Es fácil ver que:

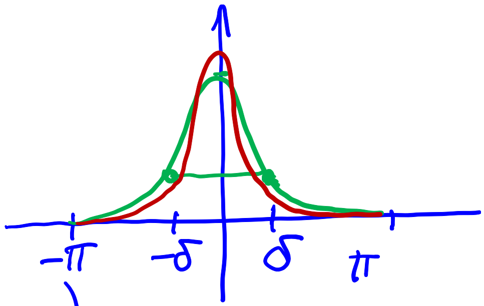
(1) $P_r(\theta - t) \geq 0$;

(2) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\,dt = 1$

(p.ej., usando el cálculo de residuos o integrando la serie que define $P_r(t)$) ;

(3) $P_r(t) < P_r(\delta)$, si $0<\delta<|t|\leq\pi$;

(4) $\lim\limits_{r\to 1^-} P_r(\delta) = 0$, $0<\delta\leq\pi$



($\Rightarrow$ para $0<\delta<|t|\leq\pi$, $P_r(t) \rightrightarrows 0$, $r\to 1^-$).

- Es una típica aproximación de la identidad (en inglés: approximate identity), lo cual permite que las convoluciones con $P_r(t)$ aproximan los valores de las funciones continuas.

Def'n. Sea $f\in L^1(\mathbb{T})$. La función $F=P[f]$, definida en $\mathbb{D}$ por la formula
$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(t)\,dt,$$
se denomina la integral de Poisson de f.

(Nótese que hemos identificado $\mathbb{T}$ con $[-\pi,\pi]$; en otros textos, con $[0,2\pi]$.)

- Si $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, vemos que
$$F(re^{it}) = P[f](z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\} f(t)\,dt = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)\,dm(t)\right\}$$

La función $h(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)\frac{dt}{2\pi}$ puede derivarse respecto al parámetro $z\in\mathbb{D}$ (derivando dentro de la integral) o desarrollarse en serie de Taylor en $\mathbb{D}$, escribiendo la serie de potencias para $\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-it}z)^n$ y luego integrando la serie término a término. Por tanto, $h\in\mathcal{H}(\mathbb{D}) \Rightarrow F=P[f]\in h(\mathbb{D})$.

Así pues, hemos probado el siguiente

Teorema. $f\in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow P[f]\in h(\mathbb{D})$.

- La identificación de $\mathbb{T}$ con $[0,2\pi]$ significa que podemos entender una función $f\in C(\mathbb{T})$ (continua en $\mathbb{T}$) como un

elemento del espacio $\tilde{C}[0,2\pi]=\{f\in C[0,2\pi]: f(0)=f(2\pi)\}$.
Este espacio contiene las restricciones de las funciones $z^n=e^{int}$ $=\cos nt+i\sin nt$ y sus combinaciones lineales, que son los polinomios trigonométricos $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$.

Teorema de aproximación de Weierstrass. Toda $f\in C(\mathbb{T})$ puede aproximarse uniformemente por polinomios trigonométricos; es decir, $\forall f\in C(\mathbb{T})$ $\exists$ polinomios trigonométricos $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ t.q.

$$\|g_n-f\|_\infty=\max_{t\in[0,2\pi]}|g_n(e^{it})-f(e^{it})|\to 0,\ n\to\infty.$$

- Usando este resultado, sin grandes dificultades podemos resolver el problema de Dirichlet para el disco (con datos continuos en $\mathbb{T}$):
  Dada $f\in C(\mathbb{T})$, encontrar una función $H\in h(\mathbb{D})\cap C(\overline{\mathbb{D}})$ t.q. $H|_{\mathbb{T}}=f$.

Teorema (Schwarz). Sea $f\in C(\mathbb{T})$. Si definimos en $\mathbb{D}$ la función H mediante la fórmula:

$$Hf(re^{i\theta})=\begin{cases} P[f](re^{i\theta}), & 0\le r<1 \\ f(e^{i\theta}), & r=1 \end{cases},$$

entonces $Hf\in h(\mathbb{D})\cap C(\overline{\mathbb{D}})$.

- Esto tiene como consecuencia el siguiente resultado:

Teorema. Sea $u:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{R}$, $u\in h(\mathbb{D})\cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Entonces

$$u=P[u|_{\mathbb{T}}]\ (\text{en } \mathbb{D})=\operatorname{Re} f,$$

donde

$$f(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}u(e^{it})\frac{dt}{2\pi},\ \forall z\in\mathbb{D}.$$

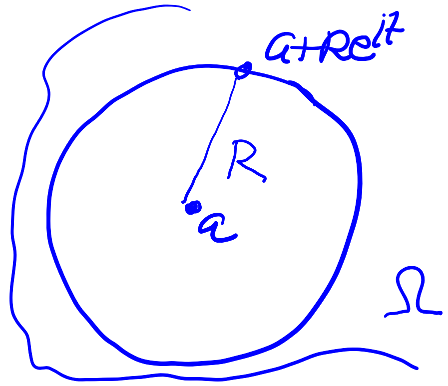
• Es fácil generalizar esta discusión para cualquier disco abierto $D(a;R)=\{z: |z-a|<R\}$. $(\overline{D}(a;R)=\{z:|z-a|\leq R\})$

Por ejemplo, si $u: \overline{D}(a;R)\to \mathbb{R}$, $u\in C(\partial\overline{D}(a;R))$, podemos definir u como función armónica en $D(a;R)$ extendiendo su valor mediante la fórmula de Poisson:

$$u(a+re^{i\theta})=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}\,u(a+Re^{it})\frac{dt}{2\pi},$$

para $0\leq r<R$.

En particular, toda función real y armónica satisface la Propiedad del valor medio $(r=0)$:

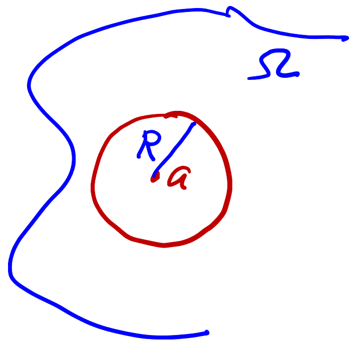


$$\boxed{u(a)=\int_{-\pi}^{\pi}u(a+Re^{it})\frac{dt}{2\pi}.}$$

(recuperamos el valor de u en el centro integrando a lo largo de la circunferencia).

• Escribiendo una $f\in\mathcal{H}(D(a;R))\cap C(\overline{D}(a;R))$ como $f=u+iv$, vemos que tiene la misma propiedad.

Lo mismo se tiene, en particular, si $u\in h(\Omega)$ y $\overline{D}(a;R)\subseteq\Omega$ o si $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D}(a;R)\subseteq\Omega$.



• Esto es lo que demuestra que la conjugada armónica de una $u\in h(\Omega)$ en $D(a;R)$ es única salvo un sumando constante:

$f_1\in\mathcal{H}(\Omega)$ con $\mathrm{Re}f_1=u$, $\quad f_2\in\mathcal{H}(\Omega)$ con $\mathrm{Re}f_2=u$

$\Rightarrow\quad f_1-f_2\in\mathcal{H}(\Omega)$, $\mathrm{Re}(f_1-f_2)=u-u\equiv 0$ en $D(a;R)$.

Teorema de la aplicación abierta $\Rightarrow f_1-f_2\equiv cte=bi$, $b\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ si $f_2=u+iv$, entonces $f_1=u+iv+bi=u+(v+b)i$.

• También es cierto el recíproco de la Propiedad del valor medio, incluso en la forma débil.

Teorema. Si Ω es un dominio, $f \in C(\Omega)$ y $\forall z \in \Omega$ $\exists$ sucesión $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ t.q. $r_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ y

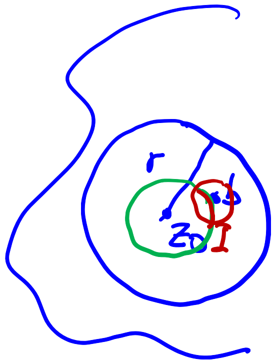
$$u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} u(z + r_n e^{it}) \frac{dt}{2\pi} \quad , \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $u \in h(\Omega)$.

• Nótese cómo una propiedad, aparentemente débil pero "muy simétrica", bajo la mera hipótesis de continuidad, implica que $u \in C^\infty(\Omega)$, en particular.

Teorema (Principio del máximo). Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in h(\Omega)$. Si $\exists a \in \Omega$ t.q. $\forall z \in \Omega$, $u(a) \geq u(z)$, entonces $u \equiv$ cte en Ω.

Dem. □ Sea $E = \{z \in \Omega : u(z) = u(a)\}$. Es un conjunto cerrado en Ω.



Sea $z_0 \in E$ y $r > 0$ t.q. $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$.
Supongamos que $\exists b \in D(z_0, r)$ t.q. $u(b) \neq u(a)$.
Entonces $u(b) < u(a)$, por hipótesis.
Continuidad $\Rightarrow$ en un entorno de b, $u(z) < u(a) = u(z_0)$.
Por tanto, si $\rho = |z_0 - b|$ y $b = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,
$\exists$ intervalo $I \subseteq [0, 2\pi]$ t.q. $\varphi \in I$ y $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) < u(z_0)$, $\forall \theta \in I$.
Prop. del valor medio $\Rightarrow$

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} < u(z_0). \quad ※$$

Por tanto, $D(z_0, r) \subseteq E \Rightarrow E$ abierto. Ω conexo $\Rightarrow E = \emptyset$ o $E = \Omega$. ☒

Referencia: Rudin: Real and Complex Analysis, 3ª ed., McGraw-Hill, 1987. (Capítulo 11).
(Hay menos resultados avanzados en Ahlfors o Conway.)