① M, 09/02/2021

PRESENTACIÓN DEL CURSO

- Profesor: Dragan Vukotić (pronunciado como Vúcotich).
- Título del curso para este año: Ceros e interpolación de funciones analíticas.
- Página web: verso.mat.uam.es/~dragan.vukotic/
  → Docencia → Curso Avanzado de Análisis.

(No está habilitada ninguna página de Moodle)
Todos los materiales del curso se podrán encontrar allí (en abierto) o se enviarán a toda la clase por correo electrónico.

- El fichero "Información práctica" contiene un resumen de los datos del curso.
- Evaluación: – 40% ejercicios. Habrá 3 hojas temáticas de problemas, divididas en listas más pequeñas. Se indicará con antelación qué problemas concretos se deben entregar resueltos.
  – 60% examen: trabajo escrito + presentación oral.

El trabajo se entregará entre el 21 y el 26 de mayo (fecha por determinar) y se defenderá el día 1 de junio en una exposición de 15', seguida de hasta 5' de preguntas y comentarios. Si no fuese posible terminar las exposiciones ese día, se empleará otro intervalo breve de tiempo el día 2/6 (sin exámenes, en teoría), siempre que eso no entre en conflicto con otras evaluaciones.

- Bibliografía. Se recomienda conseguir las últimas ediciones señaladas en la lista porque contienen ciertos detalles relevantes para el curso que no están en las ediciones anteriores.

Usaremos una mezcla de referencias para cada tema, combinadas con los apuntes de clase.

- <u>Tutorías</u>: horario flexible, por acuerdo mutuo previo.

¿Qué tipo de problemas vamos a estudiar en este curso?

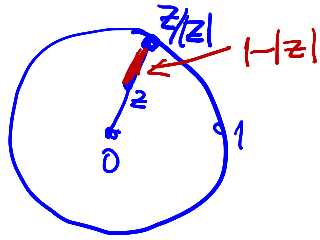
- Este es un curso avanzado de Variable Compleja. Por tanto, trataremos con funciones analíticas (holomorfas). Por supuesto, habrá cierta interacción con la teoría del potencial (funciones armónicas, problema de Dirichlet), con la variable real (medidas, espacios tipo L^p), con el análisis funcional (espacios de Banach y de Hilbert, operadores acotados, funcionales lineales, convergencia débil, etc.) y con la teoría de aproximación e interpolación.

- Nos interesarán dos tipos de problemas.

1) <u>Ceros.</u> Ya sabemos del curso de Variable Compleja I (o equivalente) que los ceros de una función analítica en un dominio forman un conjunto discreto: o es finito o es numerable pero con puntos de acumulación en la frontera del dominio (nunca dentro, salvo para la función $f(z)\equiv 0$).

Si consideramos una colección $\mathcal{F}$ de funciones analíticas en un dominio (es decir, un conjunto de funciones que cumplen ciertas condiciones adicionales), la pregunta natural es si los ceros de las funciones en $\mathcal{F}$ también deben cumplir unas condiciones adicionales.

Veremos, por ejemplo, que los ceros (z_n) de una función analítica y acotada en el disco unidad $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ deben cumplir la <u>condición de Blaschke</u>:

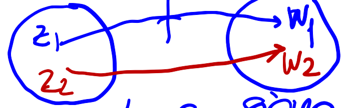


$\boxed{\sum_n (1-|z_n|) < \infty}$ (la suma de sus distancias a la frontera del disco debe ser finita). Recíprocamente, dada una sucesión de puntos en el disco que cumple dicha condición, siempre existirá una función analítica y acotada en el disco que tiene precisamente esos puntos (z_n) como ceros y ningún otro cero. (Tales funciones pueden definirse como ciertos productos infinitos, llamados <u>productos de Blaschke</u>, aunque también pueden ser más complicadas.)

2) <u>Interpolación</u>. Dado un conjunto $S \subseteq \mathbb{N}$, con $S = \{1, 2, \dots, N\}$ o $S = \mathbb{N}$ y los puntos $\{z_k : k \in S\} \subseteq \Omega$ (dominio) y $\{w_k : k \in S\} \subseteq \mathbb{C}$, nos interesa saber si existe una función f analítica en Ω (y con ciertas condiciones adicionales) tal que

$$f(z_k) = w_k, \quad \forall k \in S.$$

Por ejemplo, dados $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, ¿qué condiciones tienen que cumplir esos 4 puntos para que exista una f, analítica en el disco y tal que $|f(z)| < 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$ (esto es, $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$) y $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$?



Veremos más adelante que la respuesta se sigue de una variante del Lema de Schwarz visto en Variable Compleja I. También veremos (quizás en uno de los trabajos asignados para el fin del curso) cómo se puede resolver el problema más general para n puntos (teorema de Pick-Nevanlinna) de forma algebraica.

Otra pregunta, que en su día fue muy importante, es la siguiente: dada una sucesión en el disco, $(w_n)_{n=1}^{\infty}$, ¿qué condiciones debe cumplir la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos <u>distintos</u> en el disco para que exista una función f, analítica en $\mathbb{D}$ y acotada por 1, tal que

$$f(z_n) = w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}?$$

Veremos que eso exige cierta separación de los puntos $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, expresada en términos de una métrica en el disco, conocida como la métrica pseudo-hiperbólica: $d(z,w) = \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$, $z,w\in\mathbb{D}$.

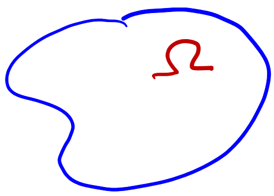
Esta solución fue dada por L. Carleson en 1958. Años más tarde, P.W. Jones encontró una fórmula explícita para la función que resuelve el problema (1980).

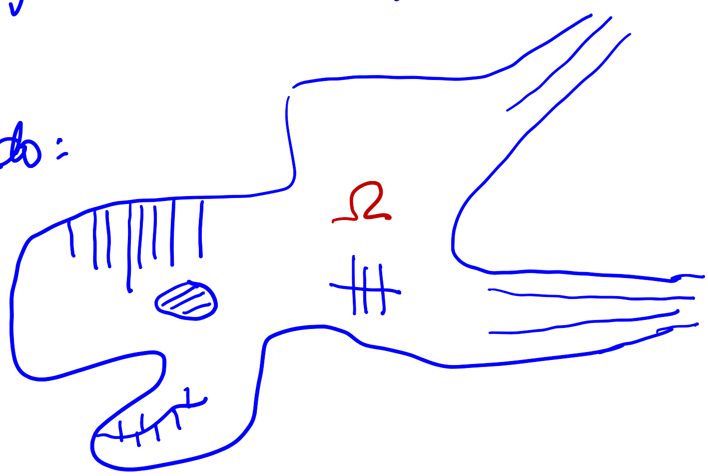
Si imponemos otras condiciones (como cierto tipo de integrabilidad) sobre la función, la respuesta se complica. Para unos espacios de funciones caracterizados por tales condiciones, conocidos como los espacios de Bergman, K. Seip dio la respuesta exacta en 1993.

Repaso de la terminología y de algunos conceptos básicos

Def'n. Un dominio en el plano complejo $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto y conexo.

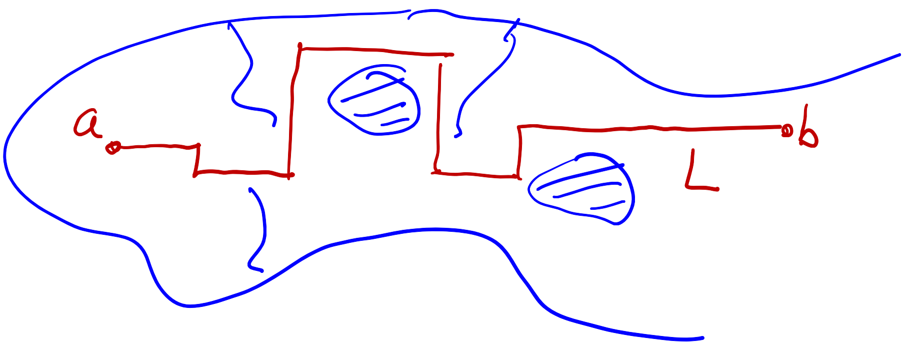
Puede ser muy simple o muy complicado:





Una propiedad importante:

Todo dominio en el plano es conexo por caminos. Más precisamente, dos puntos $a,b\in\Omega$, $a\neq b$, pueden unirse mediante una línea poligonal, $L\subseteq\Omega$, con los lados paralelos a alguno de los ejes real e imaginario.



(Relevante en varias demostraciones en Cálculo Multivariable y en Variable Compleja I.)

Los dominios que más nos interesarán en este curso serán: $\mathbb{D}=\{z: |z|<1\}$ (disco unidad), $D(a;R)=\{z: |z-a|<R\}$ (disco de centro a y radio R), $\mathbb{H}=\{z: \operatorname{Im} z>0\}$ (semiplano superior) y otros semiplanos, así como el propio $\mathbb{C}$.

<u>Def'n</u>. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función (compleja) y $z_0\in\Omega$. Diremos que f <u>tiene derivada compleja</u> en z_0 (o que es <u>$\mathbb{C}$-diferenciable</u> en z_0) si existe el límite finito

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}. \qquad (h\in\mathbb{C})$$

Si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en todo $z_0\in\Omega$, diremos que f es <u>holomorfa</u> en Ω. <u>Notación</u>: $f\in\mathcal{H}(\Omega)$.

• Observamos que toda $f:\Omega\to\mathbb{C}$, $f: z\mapsto w$, $z=x+yi$, $w=u+vi$, puede verse como una función de Ω (como $\subseteq\mathbb{R}^2$) en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=(u(x,y),v(x,y)).$$

Recordemos que una función de este tipo es <u>$\mathbb{R}$-diferenciable</u> en $z_0=(x_0,y_0)$ si existe una transformación lineal $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-L(h,k)\|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

Entonces la transformación L se corresponde con la matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$$

en el punto (x_0,y_0). En particular, f es $\mathbb{R}$-diferenciable si tiene las derivadas parciales (de primer orden) continuas en (x_0,y_0).

• El siguiente resultado, que no se ve siempre en el curso básico de Variable Compleja I, relaciona ambos conceptos.

<u>Tma.</u> $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en $z_0\in\Omega \iff f$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en z_0 y cumple allí las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(z_0)=v_y(z_0),\quad u_y(z_0)=-v_x(z_0) \qquad (C\text{-}R).$$

Normalmente se enuncia el siguiente

<u>Corolario.</u> Si u_x, u_y, v_x, v_y son continuas en $z_0\cong(x_0,y_0)$, entonces f es $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0 si y sólo si cumple (C-R) en z_0.

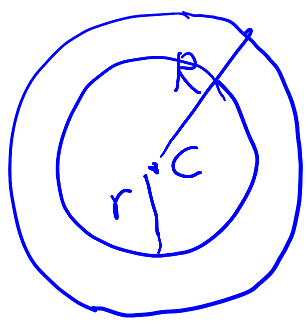
• Una <u>serie de potencias</u> (compleja) <u>centrada en c</u> es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$; a_n = <u>coeficientes</u> de la serie.

<u>Teorema (Abel).</u> $\exists R\in[0,+\infty]$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ converge absolutamente cuando $|z-c|<R$ y diverge cuando $|z-c|>R$.

Además, la serie converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(c;r)=\{z:|z-c|\le r\}$, con $r<R$.

El valor de R es único y viene dado por la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

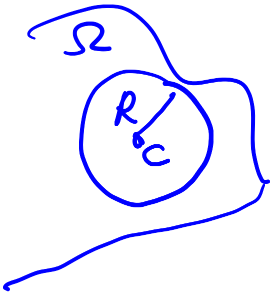


entendiendo que $\frac{1}{+\infty}=0$, $\frac{1}{0}=+\infty$.

R = <u>radio de convergencia</u>.

<u>Ejemplo.</u> $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. $R=1$ (ejercicio).

• Suele decirse que $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es <u>analítica</u> en Ω si $\forall c\in\Omega$ $\exists R>0$ tal que $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$, $\forall z\in D(c;R)\subseteq\Omega$.



<u>Tma. (derivación de series de potencias)</u>

Para tal f y $\forall z\in D(c;R)$,

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n(z-c)^{n-1}$$

y podemos seguir derivando sucesivamente. $a_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

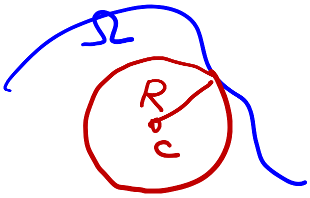
(Esto es, toda f analítica es holomorfa y mucho más: es diferenciable infinitas veces.)

• De la teoría de Cauchy se deduce el siguiente hecho impresionante: holomorfía $\Longleftrightarrow$ analiticidad.

<u>Tma.</u> $f\in\mathcal{H}(\Omega)\Longleftrightarrow f$ es analítica en Ω.

Dado $c\in\Omega$, el R mencionado arriba es $=\text{dist}(c,\partial\Omega)$.

($D(c;R)$ es el disco más grande posible contenido en Ω y centrado en c.)



Los ejemplos más sencillos de funciones holomorfas (analíticas) son los polinomios. Para ellos, será fácil resolver el problema de interpolación con un número finito de datos.

<u>Tma. (Lagrange)</u> Dados $z_0,z_1,z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ (distintos entre sí) y $w_0,w_1,w_2,\dots,w_n\in\mathbb{C}$, existe un único polinomio P (con coeficientes complejos) de grado $\leq n$ y tal que $P(z_k)=w_k$, $k=0,1,\dots,n$.

Demostración. □ Buscamos los polinomios $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ tales que

$$\circledast \begin{cases} P(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n = w_0 \\ P(z_1) = a_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z_1^n = w_1 \\ \vdots \\ P(z_n) = a_0 + a_1 z_n + \dots + a_n z_n^n = w_n \end{cases}$$

$$\Delta = V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & z_{n-1}^2 & \dots & z_{n-1}^n \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{vmatrix}$$

(Vandermonde) (determinante del sistema)

$$= \prod_{0 \le j < i \le n} (z_i - z_j) = (z_1 - z_0)(z_2 - z_0)(z_2 - z_1) \dots (z_n - z_0)(z_n - z_1) \dots (z_n - z_{n-1})$$

$\neq 0$, ya que $z_i \neq z_j$, para $i \neq j$.

$\therefore$ El sistema $\circledast$ tiene solución única. ☒

- De hecho, podemos dar una formula explícita para P. La veremos en la próxima clase.

También, el problema se puede generalizar, para incluir los valores de las derivadas.
